Estimation optimale en traitement du signal
Bureau d'étude n° 2

Mathieu Goutelle

7 mai 2001

1 Introduction

Le but de ce BE est la présentation du filtre de Kalman. Ce filtre fait partie de la famille des filtres optimaux. Il permet d'estimer l'état d'un système linéaire stochastique gouverné par l'équation différentielle sous forme d'état :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= A\,X(k) + B\,U(k) + V_1(k) && (1) \\ Y(k) &= C\,X(k) + V_2(k) && (2) \end{aligned}$$

où : $V_1(k)$ et $V_2(k)$ sont des bruits blancs de moyenne nulle, stationnaires et ergodiques ;
l'état initial X_0 est une variable aléatoire de moyenne $\bar{x}_0$ et de covariance P_0 ;
les bruits V_1 et V_2 sont décorrélés de X_0.

La covariance de V_1 et V_2 est donnée par :

$$E\left[\begin{pmatrix} V_1(k) \\ V_2(k) \end{pmatrix} \cdot \left({}^tV_1(l), {}^tV_2(l)\right)\right] = \begin{bmatrix} Q & S \\ {}^tS & R \end{bmatrix} \delta(k-l)$$

La première équation est l'équation d'état et la seconde l'équation de sortie. Le filtre de Kalman permet de déterminer l'état $X(k)$ du système. Dans le cas de bruits gaussiens, le filtre donne l'estimateur à variance minimale (plus exactement la moyenne conditionnelle $\hat{X}(k)$ étant donné les réalisations des mesures $(Y(i))_{0\leq i\leq k}$. Si le bruit est non gaussien, le filtre donne l'estimateur linéaire à variance minimale de l'état $X(k)$ (généralement différent de la moyenne conditionnelle).

2 Construction du filtre de Kalman

La moyenne conditionnelle vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \hat{X}(0) &= E[X(0)] \\ \hat{X}(k+1) &= A\,\hat{X}(k) + \mathscr{K}(k)\,(Y(k) - C\,\hat{X}(k)) + B\,U(k) \end{aligned}$$

où E l'opérateur espérance mathématique. $\mathscr{K}$, le gain du filtre, est donné par :

$$\mathscr{K}(k) = [A\,\Sigma(k)\,{}^tC + S] \cdot [C\,\Sigma(k)\,{}^tC + R]^{-1}$$

où $\Sigma(k)$, la matrice de covariance de l'état, est donné par l'équation récurrente :

$$\begin{aligned} \Sigma(k+1) &= A\,\Sigma(k)\,{}^tA + Q - \mathscr{K}(k)\,(C\,\Sigma(k)\,{}^tC + R){}^t\mathscr{K}(k) \\ \Sigma(0) &= \Sigma_0 = \mathrm{cov}(X_0) \end{aligned}$$

3 Étude du filtre de Kalman

3.1 Simplification

On peut d'abord montrer qu'il est possible de choisir $S = 0$ (V_1 et V_2 décorrélés). En effet, si l'on écrit l'équation d'état du système sous la forme suivante, il vient :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= A\,X(k) + B\,U(k) + V_1(k) - SR^{-1}(Y(k) - Y(k)) \\ &= A\,X(k) + B\,U(k) + V_1(k) - SR^{-1}(C\,X(k) + V_2(k) - Y(k)) \\ &= (A - SR^{-1}C)\,X(k) + B\,U(k) + V_1(k) + SR^{-1}\,Y(k) + V_1(k) - SR^{-1}\,V_2(k) \\ &= A'\,X(k) + B\,U(k) + SR^{-1}\,Y(k) + V_1'(k) \end{aligned}$$

en posant : $A' = A - SR^{-1}C$ et $V_1'(k) = V_1(k) - SR^{-1}\,V_2(k)$. Ainsi, V_1' et V_2 sont décorrélés :

$$E(V_1'\,{}^tV_2) = E(V_1\,{}^tV_2) - SR^{-1}\,E(V_2\,{}^tV_2) = S - SR^{-1}R = 0$$

Certes, on a ainsi changé l'équation d'état du système (donc sa dynamique). Mais la structure du problème reste la même. On peut aussi remarquer que la transformation induit aussi une modification de Q. Dorénavant, on considérera que $S = 0$. L'équation définissant le gain du filtre s'écrit alors :

$$\mathscr{K}(k) = A\,\Sigma(k)\,{}^tC \cdot [C\,\Sigma(k)\,{}^tC + R]^{-1}$$

Au premier rang, on peut estimer $\hat{X}(0)$ et prendre $\Sigma(0) = 1$. Alors, récursivement, à l'étape k, on connaît $\hat{X}(k)$ et $\Sigma(k)$. On en déduit $\mathscr{K}(k)$. On peut alors calculer $\hat{X}(k+1)$ et $\Sigma(k+1)$. On déduit de ce raisonnement l'algorithme du filtre de Kalman.

On peut encore montrer, que lorsque $A = \mathrm{I}$, $B = 0$, $C = H$ et $Q = 0$, le filtre de Kalman se confond avec la méthode des moindres carrés ordinaire. En effet, les équations s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= X(k) = X(0) \\ Y(k) &= H\,X(0) + V_2(k) \end{aligned}$$

On cherche donc bien à estimer un certain nombre de paramètres constants du système (X_0), dont la mesure ($Y(k)$) est à tout instant bruitée (V_2). On retrouve bien la situation de la méthode des moindres carrés ordinaire.

3.2 Applications

3.2.1 Étude du cas $n = 1$

Dans le cas $n = 1$, on peut écrire les équations pour $A = a$ avec $|a| < 1$, $C = 1$, $Q = 0$, $R = 1$ et $\Sigma_0 = 1$. Alors, il vient :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= a\,x(k) = a^{k+1}\,x(0) \\ \hat{x}(k+1) &= \hat{x}(k) + \mathscr{K}(k)\,(y(k) - \hat{x}(k)) \\ \mathscr{K}(k) &= \frac{a\,\Sigma(k)}{\Sigma(k) + 1} \\ \Sigma(k) &= \frac{a^2\,\Sigma(k)}{\Sigma(k) + 1} \end{aligned}$$

On peut alors simuler un filtre de Kalman (pour $a = 0{,}9$ et $x_0 = 5$), pour différents niveaux de bruit. Le bruit stationnaire ergodique sera lui-même simulé par des séquences binaires pseudo-aléatoires. Malheureusement, le bruit généré n'est pas gaussien. Un biais va donc apparaître dans l'estimation de l'état du système. Les résultats sont représentés sur les trois courbes suivantes, pour différents niveaux physiques S_0 de bruit. Néanmoins, on peut observer la convergence rapide du filtre de Kalman, même pour les forts niveaux de bruit.

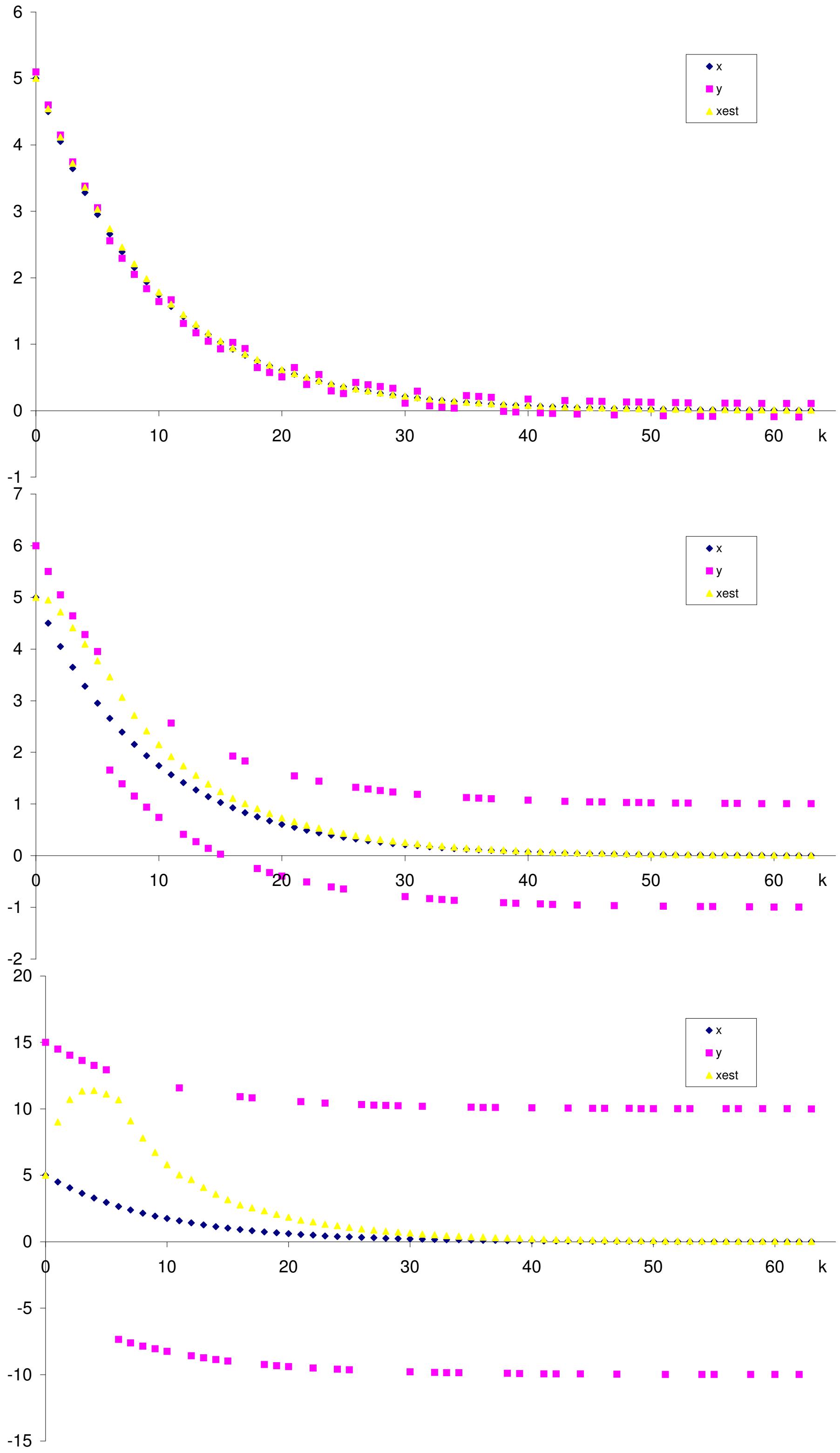

FIG. 1 – *Résultats de la simulation pour* $S_0 = 0{,}1,\ 1$ *et* $10\ W \cdot Hz^{-1}$ *(de haut en bas)*

3.2.2 Étude du cas $n = 2$

Prenons l'exemple d'un mobile qui se déplace sur une trajectoire rectiligne. L'accélération du mobile est constante entre deux instants d'observation. La mesure est soumise à des fluctuations aléatoires, de moyenne nulle, indépendantes les unes des autres et de variance Γ indépendante du temps :

$$\begin{aligned} \gamma(t_n) &= \gamma_n && \text{si } t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ E[\gamma_n] &= 0 && \forall n \in \mathbb{N} \\ E[\gamma_i \cdot \gamma_j] &= \Gamma \cdot \delta_{ij} \end{aligned}$$

On peut alors écrire les équations suivantes, pour $t_k \leq t \leq t_{k+1}$:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_k + \gamma_n\,(t - t_k) \\ x(t) &= x_k + v_k\,(t - t_k) + \frac{\gamma_k}{2}\,(t - t_k)^2 \end{aligned}$$

soit, en échantillonnant aux points d'observation ($t = t_{k+1}$) et en posant $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, il vient :

$$\begin{cases} v(k+1) = v(k) + \gamma_k\,\Delta t \\ x(k+1) = x(k) + v_k\,\Delta t + \frac{\gamma_k}{2}\,\Delta t^2 \end{cases}$$

On s'intéresse à la position du mobile et l'on isole dans la mesure γ_k la partie déterministe de la partie aléatoire : $\gamma_k = \Gamma_k^d + \Gamma_k^a = U(k) + V_1(k)$. On peut alors expliciter les équations d'état et de sortie du système :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t^2/2 \\ \Delta t \end{bmatrix} \Gamma_k^d + \begin{bmatrix} \Delta t^2/2 \\ \Delta t \end{bmatrix} \Gamma_k^a \\ x(k) &= [1, 0] \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + V_2(k) \end{aligned}$$

On peut également expliciter la variance du bruit V_1, issue du caractère stochastique de la mesure de γ_k :

$$Q = E[V_1\,{}^tV_1] = \begin{bmatrix} \Delta t^2/2 \\ \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta t^2/2, \Delta t \end{bmatrix} E[(\Gamma_k^d)^2] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 \end{bmatrix} \Gamma$$