Estimation optimale en traitement du signal
Bureau d'étude n° 1

Mathieu Goutelle

19 mars 2001

1 Introduction

1.1 Généralités

Le but de ce BE est d'utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour la détermination de paramètres d'un signal noyé dans un bruit blanc gaussien stationnaire ergodique.

Si on connaît le signal source, ce problème ne pose guère de problème : en effet, on peut supprimer le bruit par intercorrélation. En revanche, si ce signal est inconnu, il faut procéder par estimation.

1.2 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Soit $y_m(t)$ un signal mesuré composé d'une partie déterministe $s(t,a)$ dépendant du paramètre a inconnu et d'un bruit $b_m(t)$ (en général un bruit de mesure) blanc gaussien stationnaire ergodique :

$$y_m(t) = s(t,a) + b_m(t) \qquad \text{pour } t \in [0; T_u]$$

où : a est le paramètre déterministe inconnu ;
T_u est la durée d'analyse du signal.

Pendant toute cette étude, nous considérerons que nous ne connaissons pas la dépendance de y_m par rapport a : en effet, y_m sera très souvent déterminé par un fichier de mesure. Pour appliquer la méthode du maximum de vraisemblance, on définit la fonction de vraisemblance suivante :

$$\mathcal{V}(a) = \int_0^{T_u} y_m(t)\, h(t,a)\, \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{T_u} s(t,a)\, h(t,a)\, \mathrm{d}t \qquad (1)$$

$$\text{avec } s(t,a) = \int_0^{T_u} R_{b_m b_m}(t-\theta)\, h(\theta,a)\, \mathrm{d}\theta \qquad (2)$$

où $R_{b_m b_m}$ est la fonction d'autocorrélation du bruit b_m. L'estimation au sens du maximum de vraisemblance consistera donc à trouver la valeur $\hat{a}_{\mathrm{MV}}$ du paramètre a qui réalise le maximum de la fonction de vraisemblance $\mathcal{V}$.

2 Applications

2.1 Résolution théorique

Si $T_u \to +\infty$, la relation (2) devient :

$$s(t,a) = \int_0^{+\infty} R_{b_m b_m}(t-\theta)\, h(\theta,a)\, \mathrm{d}\theta = (R_{b_m b_m} \otimes h)(t)$$

Or, pour un bruit blanc gaussien stationnaire ergodique, on sait que :

$$R_{b_m b_m}(\tau) = S_0\,\delta(\tau)$$

Donc lorsque $T_u \to +\infty$ — en théorie, T_u grand en pratique — et b_m est un bruit blanc gaussien stationnaire ergodique, la solution h de l'équation intégrale (2) est $h(t,a) = \frac{2}{S_0} s(t,a)$. La fonction de vraisemblance (1) devient alors :

$$\mathcal{V}(a) = \frac{2}{S_0}\int_0^{T_u} y_m(t)\,s(t,a)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{S_0}\int_0^{T_u} s^2(t,a)\,\mathrm{d}t$$

La condition nécessaire d'optimalité ($\mathcal{V}$ maximum) va s'écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial a} = 0$$

2.2 Étude du récepteur à corrélation

Dans le récepteur à corrélation, le paramètre a inconnu est l'amplitude du signal. On peut donc écrire : $s(t,a) = a\,s(t)$, où $s(t)$ est un signal de forme parfaitement connue. La condition d'optimalité de la fonction de vraisemblance $\mathcal{V}$ s'écrit donc ($T_u \to +\infty$) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial a} = 0 \quad &\iff \quad \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{2}{S_0}\int_0^{T_u} y_m(t)\cdot \hat{a}\,s(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{S_0}\int_0^{T_u} \hat{a}^2 s^2(t)\,\mathrm{d}t\right] = 0 \\
&\iff \quad \int_0^{+\infty} y_m(t)\,s(t)\,\mathrm{d}t - \hat{(a)}\int_0^{+\infty} s^2(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\
&\iff \quad \hat{a} = \frac{\int_0^{+\infty} y_m(t)\,s(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^{+\infty} s^2(t)\,\mathrm{d}t} \\
&\iff \quad \hat{a} = \frac{R_{y_m s}(0)}{R_{ss}(0)}
\end{aligned}$$

Comme l'on connaît $s(t)$ et $y(t)$ (par mesure), on peut estimer a par un calcul d'intercorrélation et d'autocorrélation, par exemple avec deux intégrateurs ou par une méthode numérique.

2.3 Estimation de la phase d'un signal sinusoïdal

Soit le signal sinusoïdal $s(t,\varphi) = a_0\,\sin(\omega_0 t + \varphi)$ noyé dans un bruit blanc gaussien stationnaire ergodique. La condition d'optimalité s'écrit dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi} = 0 \quad &\iff \quad 2\frac{a_0}{S_0}\left[\int_0^{T_u} y_m(t)\,\cos(\omega_0 t + \hat{\varphi})\,\mathrm{d}t - a_0\int_0 T_u \sin(\omega_0 t + \hat{\varphi})\,\cos(\omega_0 t + \hat{\varphi})\,\mathrm{d}t\right] = 0 \\
&\iff \quad \int_0^{T_u} (y_m(t) - a_0\,\sin(\omega_0 t + \hat{\varphi}))\,\cos(\omega_0 t + \hat{\varphi})\,\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

Si l'on choisit T_u tel que $\omega_0 T_u = k\pi$ avec $k \gg 1$, il reste uniquement dans l'équation précédente :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi} = 0 \quad &\iff \quad \int_0^{T_u} y_m(t)\,\cos(\omega_0 t + \hat{\varphi})\,\mathrm{d}t = 0 \\
&\iff \quad \cos\hat{\varphi}\int_0^{T_u} y_m(t)\,\cos\omega_0 t\,\mathrm{d}t - \sin\hat{\varphi}\int_0^{T_u} y_m(t)\,\sin\omega_0 t\,\mathrm{d}t = 0 \\
&\iff \quad \tan\hat{\varphi} = \frac{\int_0^{+\infty} y_m(t)\,\cos\omega_0 t\,\mathrm{d}t}{\int_0^{+\infty} y_m(t)\,\sin\omega_0 t\,\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

On retrouve encore une méthode de corrélation pour estimer le paramètre φ. De façon plus générale, on peut constater que les méthodes de corrélation permettent toujours d'augmenter le rapport signal sur bruit.

3 Simulation numérique

3.1 Simulation d'un bruit blanc gaussien stationnaire ergodique

À l'aide de séquences binaires pseudo-aléatoires, on peut simuler un bruit blanc stationnaire ergodique. On procède en utilisant des registres à décalage. Le premier registre contient la somme modulo 2 d'un certain nombre d'autres et les valeurs des autres registres se décalent à chaque top d'horloge. Le bruit blanc stationnaire ergodique généré est la sortie du dernier registre. Par exemple avec 6 registres, le premier registre contient la somme modulo 2 du cinquième et du sixième et on obtient la suite de valeurs suivantes (de période 64) :

D1	**D2**	**D3**	**D4**	**D5**	**D6**
1	1	1	1	1	1
-1	1	1	1	1	1
-1	-1	1	1	1	1
-1	-1	-1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	1	-1	-1	-1	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

3.2 Application à l'estimation de l'amplitude des signaux

Pour mettre en œuvre la méthode d'estimation décrite, nous allons noyé un signal $s(t)$ de forme connue, d'amplitude unité, dans un bruit blanc gaussien stationnaire ergodique de niveau physique S_0, simulé à l'aide de séquences binaires pseudo-aléatoires. Les signaux seront échantillonnés tous les 0,05 s sur une durée utile de T_u = 3,2 s (soit 64 points de mesure). Le calcul des intégrales est effectué numériquement par la méthode des rectangles. Pour différentes formes de signaux et différents niveaux de bruit, on obtient les estimations suivantes de l'amplitude de s.

$$
\begin{array}{lll}
s_1(t) = \sin(2\pi\, t) & S_0 = 0{,}1\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{Hz}^{-1} & \longrightarrow \quad \hat{a} = 1{,}0395 \\
 & S_0 = 1\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{Hz}^{-1} & \longrightarrow \quad \hat{a} = 1{,}1251 \\
 & S_0 = 10\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{Hz}^{-1} & \longrightarrow \quad \hat{a} = 1{,}3955 \\
 & & \\
s_2(t) = \exp(-t) & S_0 = 0{,}1\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{Hz}^{-1} & \longrightarrow \quad \hat{a} = 1{,}0190 \\
 & S_0 = 1\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{Hz}^{-1} & \longrightarrow \quad \hat{a} = 1{,}0599 \\
 & S_0 = 10\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{Hz}^{-1} & \longrightarrow \quad \hat{a} = 1{,}1895 \\
 & & \\
s_3(t) = \exp(-t) + \exp(-2t) & S_0 = 0{,}1\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{Hz}^{-1} & \longrightarrow \quad \hat{a} = 1{,}0201 \\
 & S_0 = 1\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{Hz}^{-1} & \longrightarrow \quad \hat{a} = 1{,}0636 \\
 & S_0 = 10\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{Hz}^{-1} & \longrightarrow \quad \hat{a} = 1{,}2010
\end{array}
$$

Sur les trois exemples précédents, on s'aperçoit facilement que l'estimation est d'autant meilleure que le niveau de bruit est faible. Ensuite, la qualité de l'estimation pour les faibles niveaux de bruit est relativement équivalente pour les trois formes de signaux. Par contre, l'estimation se dégrade plus vite dans le cas de s_1 (39% d'erreur contre moins de 20% pour s_2 et s_3) : cela provient peut-être du fait que pour un fort niveau de bruit, les variations de la sinusoïde sont moins discernables que le décroissance de l'exponentielle.

Au contraire, on peut observer que l'estimation de l'amplitude de s_2 et s_3 se comporte quasiment pareil face à l'augmentation du niveau de bruit. On aurait pu croire que s_3 y serait moins sensible car son niveau est plus fort. Mais il faut considérer que le deuxième terme dans s_3 n'a presque plus d'influence au delà de $T_u/2$, précisément au moment où le bruit masque le signal qui tend vers zéro.