

# Transmission numérique

## Bureau d'étude n° 1

Mathieu Goutelle

26 septembre 2001

### 1 Introduction

Le thème de ce bureau d'étude est l'étude du filtrage d'un signal de communication, en téléphonie par exemple. Pour ce faire, on désire réaliser la synthèse d'un filtre numérique vérifiant un gabarit idéal en amplitude de type passe-bas :

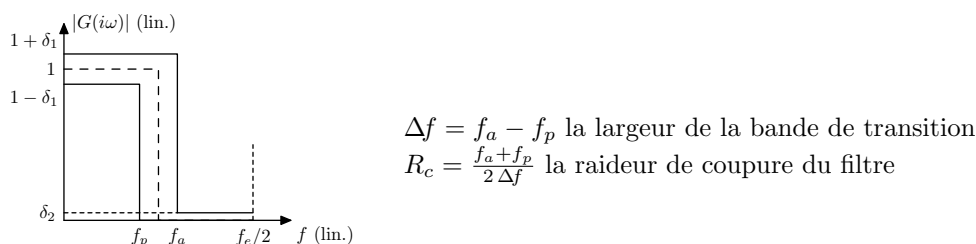


FIG. 1 – *Gabarit d'un filtre anti-repliement*

Pour réaliser la synthèse d'un filtre à phase linéaire de type RIF ou non récursif de fonction de transfert  $G(Z) = \sum_{k=0}^m a_k Z^{-k}$  où  $m$  et les coefficients  $(a_k)_{0 \leq k \leq m}$  sont inconnues. La méthode employée suivra les étapes ci-dessous :

- Estimation du nombre minimal de coefficients ;
- Détermination des valeurs des  $(a_k)_k$  ;
- Détermination du nombre de *bits* dans le cas d'une réalisation en électronique digitale ;
- Choix de la structure ou de l'algorithme ;
- Réalisation électronique ou informatique du filtre.

### 2 Construction d'un filtre anti-repliement

#### 2.1 Étude du filtre analogique vérifiant les mêmes conditions

Pour permettre la numérisation des signaux téléphoniques, il est indispensable de limiter le spectre en fréquence du signal. La bande de fréquence utilisée est comprise entre 300 Hz et 3400 Hz. On peut alors numériser le signal à la fréquence  $f_e = 8000$  Hz, compatible avec le théorème de Shannon.

Un filtre anti-repliement est un filtre passe-bas d'ordre suffisant pour empêcher au maximum le repliement dû à la périodisation du spectre après échantillonnage. Il doit couper suffisamment les fréquences au delà de  $f_c = 3400$  Hz et conserver les fréquences inférieures.

Pour limiter le repliement, il faut que le filtre périodisé se coupe (en  $C$ ) suffisamment bas dans la zone dégradée du signal. On définit pour cela l'erreur de repliement  $\varepsilon$  par  $\varepsilon' = 20 \log \varepsilon$ . Il faut alors que l'ordre du filtre soit suffisant pour minimiser l'erreur de repliement.

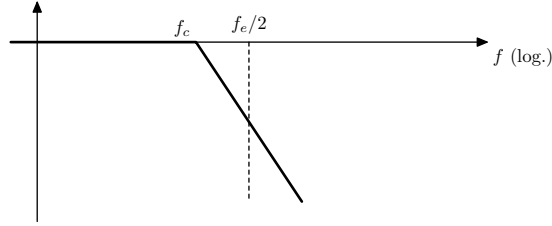


FIG. 2 – Filtre passe-bas analogique anti-repliement

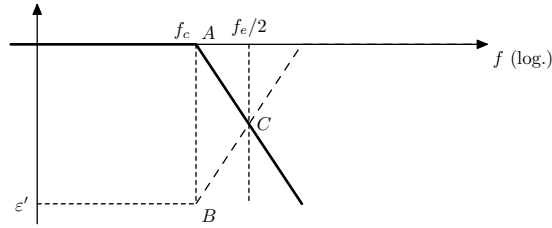


FIG. 3 – Détermination de l'ordre du filtre pour minimiser l'erreur de repliement

Le triangle  $ABC$  est par construction isocèle. On peut alors déterminer la pente du filtre, la pente étant égale à  $-20n$  avec  $n$  l'ordre du filtre. Pour une erreur de repliement  $\varepsilon = 1/100$ , il vient :

$$-20n = \frac{\varepsilon'/2}{\log f_c/2 - \log f_c}$$

On trouve  $n \geq 14$ , avec les valeurs numériques. La présence d'un repliement acceptable impose donc d'utiliser un filtre d'ordre très élevé. En pratique, il serait possible de prendre un filtre d'ordre inférieur en diminuant  $f_c$ , au détriment de la qualité du signal obtenu après restitution. Néanmoins, on peut diminuer  $f_c$  sans trop de pertes audibles car la voix comporte peu d'harmoniques de haute fréquence (cela peut varier en fonction de la langue).

En plus de cet obstacle technique, cet équipement est incompatible avec des utilisations tel que l'ADSL, qui occupent justement les bandes de fréquences supérieures à 8000 Hz.

## 2.2 Synthèse d'un filtre numérique non-récurif à phase linéaire

Pour pallier aux inconvénients du filtre analogique anti-repliement, une solution est d'utiliser un filtre numérique. Cela est d'autant plus justifié que les signaux téléphoniques sont transmis sous forme numérique entre les équipements du réseau. Les filtres numériques ont aussi le grand avantage de pouvoir avoir une phase linéaire en  $\omega$ , particularité impossible à réaliser en analogique. Ce type de filtre n'induit plus de distorsion de phase sur le signal filtré.

Reprenons la fonction de transfert  $G(Z)$  d'un filtre numérique en posant  $Z = e^{i\omega}$  :

$$G(i\omega) = \sum_{k=0}^m a_k e^{-ik\omega}$$

Si l'on impose la condition  $a_k = a_{m-k}$  et que l'on choisit  $m$  impair ( $m = 2r + 1$ ), on peut appairer les termes de la somme deux à deux :

$$\begin{aligned} G(i\omega) &= \sum_{k=0}^r a_k \left( e^{ik\omega} + e^{i(m-k)\omega} \right) \\ &= e^{i\frac{m}{2}\omega} \sum_{k=0}^r a_k \left( e^{i(\frac{m}{2}-k)\omega} + e^{i(\frac{m}{2}-k)\omega} \right) \end{aligned}$$

$$= e^{i\frac{m}{2}\omega} \sum_{k=0}^r 2a_k \cos\left(\left(\frac{m}{2} - k\right)\omega\right)$$

Le cas  $m$  pair ne change rien à la forme précédente du résultat : il fait simplement apparaître dans la somme une constante provenant du terme médian.

On s'aperçoit que l'on a bien obtenu l'expression d'une fonction de transfert à phase linéaire ( $\varphi = i\frac{m}{2}\omega$ ). Le deuxième facteur, réel, est un polynôme trigonométrique, donc une série de Fourier tronquée. La méthode pour déterminer les coefficients ( $a_k$ ) est alors de décomposer en série de Fourier une fonction de transfert (symétrisée et périodisée) respectant le gabarit imposé et de tronquer la série obtenue.

Si l'on reprend l'exemple de gabarit donné au début, en prenant comme valeur numérique :

$$\begin{aligned} f_p &= 0,2 \text{ Hz} & \delta_1 &= 0,01 \\ f_a &= 0,3 \text{ Hz} & \delta_2 &= 0,02 \\ f_e &= 1 \text{ Hz} \end{aligned}$$

une fonction de transfert admissible est  $\chi_{[-0,25;0,25]}$  (symétrisée et périodisée, de période 1) dont les coefficients de la série de Fourier sont :

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{2} \\ \text{et } \forall k \neq 0, h_k &= \int_{-0,5}^{0,5} \chi_{[-0,25;0,25]} e^{2i\pi k f} df = \frac{1}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{2} \end{aligned}$$

La suite des coefficients ( $a_k$ ) <sub>$k$</sub>  est aussi la suite des valeurs de la réponse impulsionnelle du filtre, qui doit être causale. On doit donc renuméroté les coefficients ainsi :

$$\forall k, 0 \leq k \leq m = 2r + 1, a_k = h_{k-r}$$

Le nombre minimal  $m$  de coefficient pour déterminer de façon satisfaisante le filtre en fonction des contraintes imposées par le gabarit est donné par la formule :

$$m + 1 = \frac{4}{3} \log \left[ \frac{1}{10 \delta_1 \delta_2} \right] \frac{f_e}{\Delta f}$$

Dans notre exemple, la fonction de transfert devra comporter au minimum 27 coefficients. Cette borne inférieure est, nous le verrons, insuffisante. Pour nous en convaincre, il suffit de tracer la fonction de transfert et de vérifier qu'elle est contenue dans le gabarit :

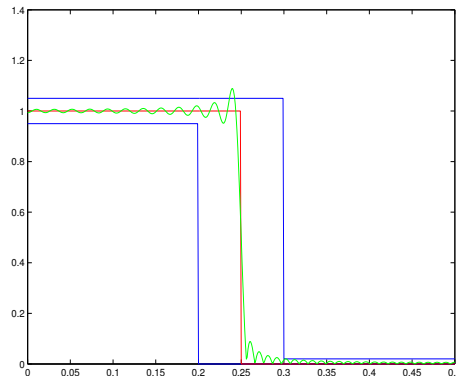


FIG. 4 – Fonction de transfert du filtre (95 coefficients)

La courbe précédente est obtenue pour 95 coefficients et entre tout juste dans le gabarit imposé. Il n'est d'ailleurs pas possible de résorber le dépassement en augmentant uniquement le nombre de

coefficients. Le comportement du filtre peut être amélioré en fenêtrant la réponse impulsionnelle par une fenêtre de durée  $T_u$ . En notant  $(g_k)_{-r \leq k \leq r}$  les valeurs échantillonnées de la fenêtre sur  $[-1/2; 1/2]$ , les coefficients du filtre fenêtré s'écrivent :

$$a_k = g_{k-r} \cdot h_{k-r} \quad \forall k, 0 \leq k \leq m = 2r + 1$$

Le résultat suivant, obtenu avec 31 coefficients et une fenêtre de Hamming, permet de se rendre compte de l'efficacité du fenêtrage sur le comportement du filtre numérique :

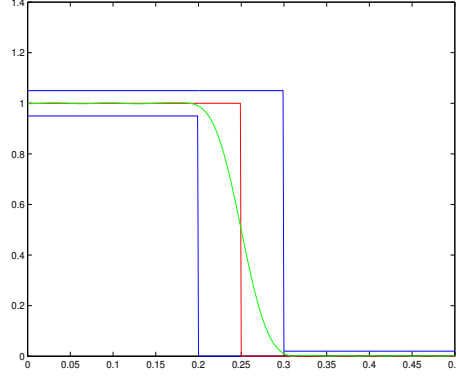


FIG. 5 – Fonction de transfert du filtre après fenêtrage par une fenêtre de Hamming (31 coefficients)

Dans le cas d'une réalisation en électronique digitale, il est également important de déterminer le nombre de bits nécessaire. Ce paramètre  $p$  est donné par la relation suivante :

$$p > \log_2 \left( \frac{2B_p}{f_e} \sqrt{\frac{M'}{3}} \frac{1}{\delta_m - \delta_0} \right)$$

en notant :  $B_p$  la bande passante du filtre ;

$$\delta_m - \delta_0 = \inf(\delta_{m1} - \delta_1, \delta_{m2} - \delta_2);$$

$$\delta_{m1} = \sup_{f \leq f_c} \|G(f) - G_{\text{th}}(f)\|;$$

$$\delta_{m2} = \sup_{f \geq f_c} \|G(f) - G_{\text{th}}(f)\|.$$

Cela donne avec les valeurs numériques de notre exemple, respectivement pour le filtre non-fenêtré et fenêtré,  $p \geq 10$  et  $p \geq 7$ .

### 2.3 Application à la construction d'un filtre RIF passe-bande à phase linéaire

Dans les applications de type téléphonie, il est utile de couper aussi les fréquences inférieures à 300 Hz pour adapter le signal transporté aux caractéristiques du canal de transmission. La construction de tel filtre passe-bande doit suivre le gabarit décrit sur la figure 6.

Pour appliquer la même méthode que précédemment à ce nouveau gabarit, il suffit de recalculer les coefficients  $(h_k)_{-r \leq k \leq r}$ , coefficients de la décomposition en série de Fourier d'une fonction de transfert admissible (symétrisée et périodisée, de période 1) :

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{2} \\ \text{et } \forall k \neq 0, h_k &= \int_{-0,5}^{0,5} (\chi_{[-0,375;-0,125]} + \chi_{[0,125;0,375]}) e^{2i\pi k f} df \\ &= \frac{1}{\pi k} \left( \sin \frac{3\pi k}{4} - \sin \frac{\pi k}{4} \right) \end{aligned}$$

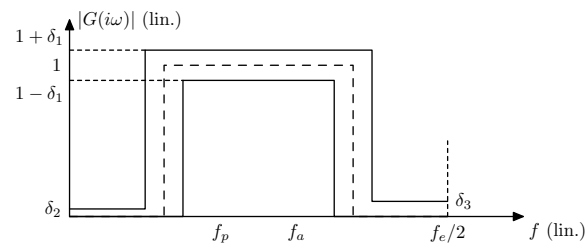


FIG. 6 – Gabarit d'un filtre passe-bande

On obtient alors de la même façon que précédemment, une fonction de transfert d'un filtre numérique respectant le gabarit. Le comportement du filtre peut une nouvelle fois être amélioré par un fenêtrage. Les deux courbes suivantes sont obtenues respectivement avec 85 et 61 coefficients.

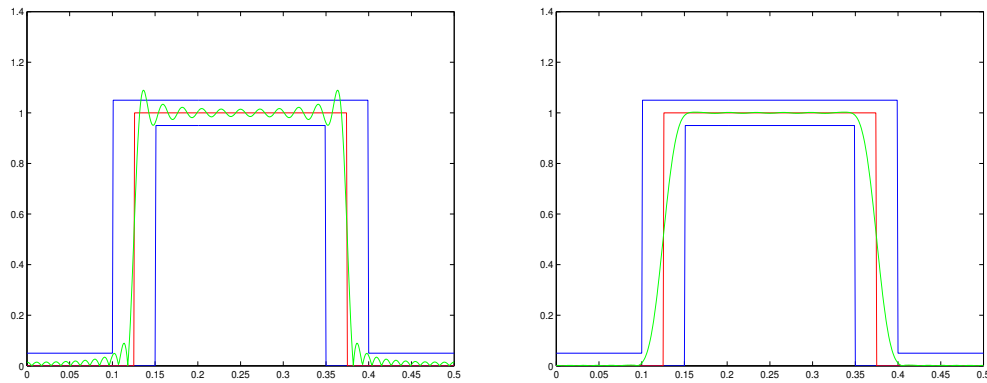


FIG. 7 – Fonction de transfert d'un filtre numérique passe-bande (fenêtré et non-fenêtré)