Transmission numérique
Bureau d'étude n° 2

Mathieu Goutelle

21 novembre 2001

1 Introduction

Le but de ce BE est l'étude de la quantification et de ses conséquences du point de vue de la transmission numérique. Nous verrons comment cette quantification peut être optimisée dans cette optique. En deuxième partie, nous étudierons les égaliseurs permettant améliorer les performances d'un canal de transmission.

2 Étude des lois de quantification et de codage

2.1 Quantification linéaire

En terme de quantification, la loi la plus naturelle est la loi de quantification linéaire : on découpe l'intervalle de variation du signal x en un nombre fini d'intervalles $[x_i; x_{i+1}]$. On note $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$ pour tout i. À tout moment t, si $x_i \leq x(t) < x_{i+1}$, on lui associe la valeur x_i (la partie entière, méthode très simple) ou $x_i + \Delta_i/2$ (avantages d'un processus centré).

On peut donc écrire à tout instant : $x(t) = x_i + \Delta x$. Le bruit de quantification b_q est caractérisé par $b_q(t) = \Delta x$. Si l'on considère que $x(t)$ est une variable aléatoire uniformément distribué sur l'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$, le bruit de quantification b_q suit une loi de distribution uniforme sur l'intervalle $[0; \Delta_i]$. Les paramètres de cette variable aléatoire sont :

$$\begin{aligned} E(B) &= \int_0^{\Delta_i} \frac{1}{\Delta_i} b \, \mathrm{d}b = \frac{\Delta_i}{2} \\ V(B) &= \int_0^{\Delta_i} \frac{1}{\Delta_i} b^2 \, \mathrm{d}b = \frac{\Delta_i^2}{12} \end{aligned}$$

Il existe un lien entre la puissance et la variance d'un signal aléatoire. En effet, pour un processus centré[1], on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathscr{P} &= \int_0^{+\infty} \mathscr{S}'_{bb}(f) \, \mathrm{d}f \\ &= \underset{\text{stat}}{\mathscr{R}'_{bb}}(0) \\ &= E(b(t) \cdot b(t+0)) \quad = \quad V(b) \end{aligned}$$

On peut donc en déduire, dans notre cas, la puissance totale du bruit de quantification (en considérant que les intervalles sont de même longueur : $\forall\ i, \Delta_i = \Delta$) :

$$\mathscr{P}_{b,\ \mathrm{tot}} = \sum_i p_i \frac{\Delta_i^2}{12} = \frac{\Delta^2}{12}$$

1. Cela reste vrai pour un processus aléatoire quelconque.

Si, par exemple, on considère une quantification linéaire utilisant p bits et que le signal est borné par $M : \forall\, t, |x(t)| \leq M$, on peut exprimer Δ :

$$\Delta = \frac{2M}{2^p}$$

Il est également intéressant de calculer le rapport « signal / bruit » $\mathscr{R}_1$ du signal quantifié. Pour cela, choisissons par exemple un signal sinusoïdal : $x(t) = x_0\, sin(\omega_0 t)$. La puissance d'un tel signal a pour expression : $\mathscr{P}_s = \mathscr{P}_{\text{eff}} = x_0^2/2$. Il vient alors pour le rapport $\mathscr{R}_1$:

$$\mathscr{R}_1 = \frac{\mathscr{P}_s}{\mathscr{P}_b} = \frac{x_0^2/2}{\Delta^2/12}$$

De cette expression, on déduit que $\mathscr{R}_1$ dépend de l'amplitude du signal. Cette dépendance n'est pas gênante dans le cas d'une chaîne de mesure : il est en effet toujours possible de régler la gamme de mesure. Mais dans le cas d'une transmission numérique, ce n'est pas possible car l'on ne connaît pas a priori le niveau du signal d'entrée (dans le cas du téléphone par exemple). Il est donc nécessaire d'utiliser un système peu cher et assez robuste : la solution est de définir une loi de quantification non-linéaire.

2.2 Quantification logarithmique

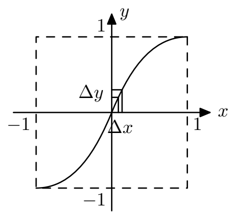

FIG. 1 – *Détermination d'une loi de quantification optimale*

Pour déterminer la loi optimale de quantification qui rende le rapport « signal / bruit » indépendant de l'amplitude du signal, considérons f une loi inconnue de transformation du signal d'entrée tel que $y = f(x)$ où y sera finalement quantifié linéairement. Alors, pour exprimer la loi f, on peut écrire :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) \qquad \text{avec } \Delta y = \frac{2}{N}$$

où N est le nombre d'intervalles. On peut alors exprimer chacune des longueurs q_i des intervalles qui sont associés par la loi f à la longueur Δ des intervalles de quantification linéaire :

$$q_i = \Delta x = \frac{\Delta y}{f'(x)} = \frac{2/N}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}$$

La puissance totale du bruit de quantification de cette loi s'écrit alors, en approchant la somme discrète par une somme continue :

$$\mathscr{P}_{b,\text{ tot}} = \sum_i p_i \frac{q_i^2}{12} \sim \int_{-1}^{1} p(x)\, \frac{q_i^2}{12}\, \mathrm{d}x$$

Il vient alors pour le rapport « signal / bruit » $\mathscr{R}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_2 = \frac{\mathscr{P}_s}{\mathscr{P}_b} &= \frac{\int_{-1}^{1} x^2 p(x)\, \mathrm{d}x}{\frac{1}{12}\int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{N}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 p(x)\, \mathrm{d}x} \\
&= \frac{\int_{-1}^{1} x^2 p(x)\, \mathrm{d}x}{\frac{1}{12}\left(\frac{2}{N}\right)^2 \int_{-1}^{1} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 p(x)\, \mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

Finalement, pour que $\mathscr{R}_2$ soit indépendant de l'amplitude du signal, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} \forall\ p(x), \quad x^2 &= k\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R} \\ x &= k\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \end{aligned}$$

La solution de cette équation différentielle va s'écrire :

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k \ln \frac{x}{x_0} \qquad \text{pour } x > 0 \\ y - y_0 &= k \ln \frac{-x}{x_0} \qquad \text{pour } x < 0 \end{aligned}$$

soit, pour tout x, $y = 1 + k \ln|x|$: on trouve une loi logarithmique, utilisée effectivement en télécommunications. En fait, cette loi est définie de façon différente en Europe (loi A, $A = 87{,}5$) et aux États-Unis (loi μ, $\mu = 255$) :

$$(A) \quad : \quad \begin{cases} y = \dfrac{Ax}{1+\ln A} & \text{si } 0 < x < 1/A \\ y = \dfrac{1+\ln Ax}{1+\ln A} & \text{si } x > 1/A \end{cases}$$

$$(\mu) \quad : \quad y = \frac{\ln(1+\mu x)}{\ln(1+\mu)}$$

Ces deux lois, en apparence très différentes, sont en réalité très similaires, comme le montre le graphique suivant :

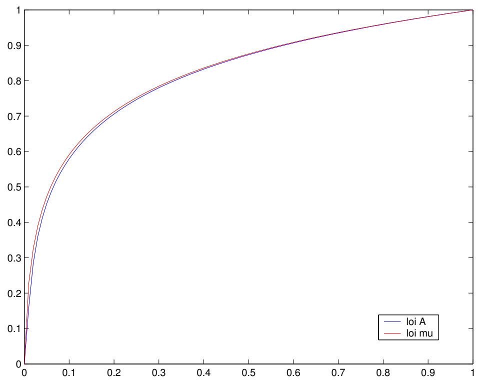

FIG. 2 – *Comparaison de la loi A et de la loi μ*

En pratique, on réalise une approximation de la loi logarithmique, dite « méthode des treize segments ». Pour cela, on découpe la courbe $y = f(x)$ en segments comme suit (cf. figure 3) :

- on coupe l'intervalle « image » en 16 intervalles de même longueur ;
- on relie le point courant à partir du point $(1, 1)$ au point construit comme le milieu de l'intervalle courant ($[O; 1]$ initialement) translaté d'une « unité » vers le bas ;
- on répète cette opération en remplaçant le point courant par le point nouvellement construit jusqu'à avoir construit les six premiers segments ;
- les segments correspondants aux intervalles verticaux O et 1 sont confondus ;
- la construction est bien entendu symétrique par rapport à l'origine.

On obtient finalement une approximation par morceau comportant $16 - 4 + 1 = 13$ segments, compte tenu de la construction à proximité de l'origine. Pour terminer, on utilise une quantification

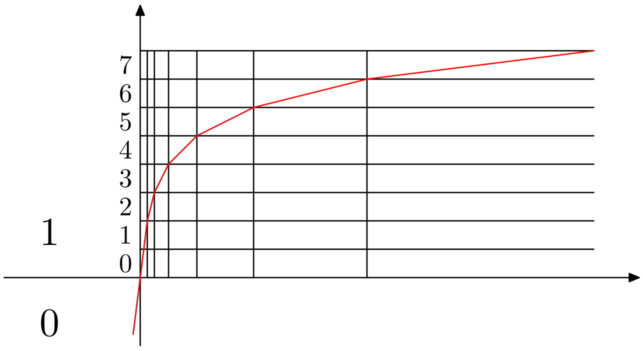

FIG. 3 – *Approximation de la loi logarithmique par la « méthode des treize segments »*

linéaire à 4 bits (noté *abcd* dans la suite) sur chaque segment. La loi de quantification ainsi définie n'est certes pas complètement optimale mais est plus facile à mettre en œuvre que la loi théorique.

Cette méthode débouche sur le codage suivant sur 12 bits :

- le premier bit sert à coder la position par rapport à l'axe horizontal (0 : négatif, 1 : positif) ;
- la position des bits *abcd* codent le numéro du segment, le début de la séquence de 4 bits étant signalé par un bit égal à 1 ;
- pour le dernier segment, le bit de signalisation code cette fois le segment (0 ou 1).

1	1	a	b	c	d	0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c	d	0	0	0	0	0
1	0	0	1	a	b	c	d	0	0	0	0
1	0	0	0	1	a	b	c	d	0	0	0
1	0	0	0	0	1	a	b	c	d	0	0
1	0	0	0	0	0	1	a	b	c	d	0
1	0	0	0	0	0	0	1	a	b	c	d
1	0	0	0	0	0	0	0	a	b	c	d
0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				

Ce code est, on le voit, assez « creux » du point de vue du transport d'information : beaucoup de bits ne servent à rien, surtout les zéros de part et d'autre de la « bande *abcd* ». Il serait plus avantageux de coder le numéro du segment sur 3 bits. On obtient ainsi un codage compressé utilisant seulement 8 bits pour représenter la même information :

$$|{}^{1}_{0}|\underbrace{\ |\ |\ }_{\text{segment}}|a|b|c|d|$$

Le premier bit sert toujours à désigner dans quel demi-plan horizontal on se place. Les 3 bits suivants codent le numéro du segment et les quatre bits restants sont le résultat de la quantification linéaire du signal sur le segment considéré.

3 Étude des égaliseurs spectraux

L'égaliseur est un circuit qui corrige dans le domaine fréquentiel le comportement du canal. La définition d'un tel égaliseur est relativement naturelle. Soit $H_c(f)$ et $H_e(f)$ les fonctions de transfert respectives du filtre et de l'égaliseur. Alors, pour tout f appartenant à la bande passante du canal, on veut pouvoir écrire :

$$|H_c(f)| \cdot |H_e(f)| = 1$$

Alors, si l'on possède une modélisation auto-régressive du canal, *i.e.* que le canal a pour fonction de transfert :

$$H_c(Z) = \frac{1}{1 + b_1 \cdot Z^{-1} + b_2 \cdot Z^{-2}}$$

il est relativement aisé de déterminer la fonction de transfert d'un égaliseur associé :

$$H_e(Z) = 1 + b_1 \cdot Z^{-1} + b_2 \cdot Z^{-2}$$

L'égaliseur associé peut être mis en œuvre grâce à un filtre numérique RIF (cf. BE n° 1).

En revanche, si le canal a été modélisé par la méthode ARMA, *i.e.* que le canal a pour fonction de transfert :

$$H_c(Z) = \frac{1 + a_1 \cdot Z^{-1} + a_2 \cdot Z^{-2}}{1 + b_1 \cdot Z^{-1} + b_2 \cdot Z^{-2}}$$

l'égaliseur associé aura pour fonction de transfert :

$$H_c(Z) = \frac{1 + b_1 \cdot Z^{-1} + b_2 \cdot Z^{-2}}{1 + a_1 \cdot Z^{-1} + a_2 \cdot Z^{-2}}$$

Comme l'on a, a priori, aucune information sur les racines de H_c qui deviennent les pôles de H_e, il peut survenir de graves problèmes d'instabilité de l'égaliseur. Cela est relativement compréhensible : les racines de H_c correspondent à des fréquences coupées par le canal. Il n'est pas possible de pratiquer une égalisation du canal au voisinage des fréquences coupées. En bref, toute fréquence non transmise est définitivement perdue.