Colle n° 5 d'Informatique – CaML
Fractales et automates*

Mathieu Goutelle (Mathieu.Goutelle@ens-lyon.fr)

1er– 5 mars 2004

Un automate déterministe est défini par son état initial (de type `int` pour simplifier), une fonction de transition et une valuation. La fonction de transition donne, pour l'état courant de l'automate et une transition possible (un caractère par exemple), le nouvel état de l'automate. La fonction de valuation donne, pour un état de l'automate, une valeur (de type `int` pour simplifier). Cette valeur est celle calculée par l'automate pour une entrée (chaine de caractères) donnée.

```
type Etat == int;;
type AD = { initial : int;
            arcs : Etat -> char -> Etat;
            vals : Etat -> int; (* Numéro état -> valeur *)
          };;
```

Définisser la fonction `executer`, qui simule le comportement de l'automate passé en argument. La valeur rendue est la valuation de l'état final dans lequel se trouve l'automate, après qu'il ait parcouru son entrée (une chaine de caractère).

1 La suite de Thue Morse $T(n)$

La suite de Thue Morse est une suite de 0 et de 1, qui a la propriété de ne jamais contenir trois fois de suite la même séquence. Il s'avère qu'elle est automatique, en ce sens qu'il existe un automate qui, après lecture de l'expansion en binaire de n, rend le n-ième terme de la suite. Cet automate a deux états : l'état initial i et l'état a. S'il est dans l'état i, alors un 0 le fait passer en i et un 1 en a ; s'il est dans l'état a, alors un 0 le fait passer en a et un 1 en i. Les valuations de a et i sont respectivement 1 et 0.

Définissez cet automate, une fonction convertissant un entier positif en son expansion binaire inversée (par exemple : $4 \rightarrow 001$, $13 \rightarrow 1011$), une fonction `mot : AD -> int -> int -> string` telle que :

```
mot auto_thuemorse 0 31;;
- : string = "01101001100101101001011001101001"
```

(c'est-à-dire : $T(0)T(1)T(2)$...) et calculez les premiers termes de la suite.

2 Pliage de papier $P(n)$

Pliez une feuille de papier en 2, en 4, etc, toujours dans le même sens ; dépliez ; les plis sont en creux (un 0) ou en bosse (un 1) ; la suite obtenue est elle aussi automatique. Si vous dépliez de telle façon que les plis forment des angles droits, vous obtenez la courbe dite du pliage, ou du serpent (ou peut-être du dragon : je confonds...).

```
mot auto_pliage 0 16;;
- : string = "11011001110010011"
```

*d'après un sujet de Dominique Michelucci, École des Mines de Saint-Étienne

On admettra que $P(n)$ est 1 moins le chiffre précédant le 0 le plus à droite dans l'écriture en base 2 de n (ici, quand on dit « à droite », c'est pour l'écriture dans le sens habituel). Par exemple : $13 = (1\dot{1}01)_2 \to 0, 9 = (1\dot{0}01)_2 \to 1$. Quand la chaine ne contient pas de zéro ? On peut toujours ajouter deux 0 devant un entier, sans modifier sa valeur... **Attention :** pour l'automate, on continue à utiliser l'expansion en base 2 retournée...

Un automate solution a 4 états : i, a, b, c. Les transitions sont : $i.0 = a$, $i.1 = i$, $a.0 = b$, $a.1 = c$, $b.0 = b.1 = b$, $c.0 = c.1 = c$; les valuations sont $i \to 1$, $a \to 1$, $b \to 1$ et $c \to 0$. Définissez cet automate, calculez les premiers termes de P.

Dessinez la courbe du pliage : se placer au centre de l'écran. Pour i de 0 à n, si $P(i) = 0$, alors avancer en tournant à droite de 90°, sinon avancer en tournant à gauche de 90°. Vous devriez obtenir une image similaire à la figure 1.

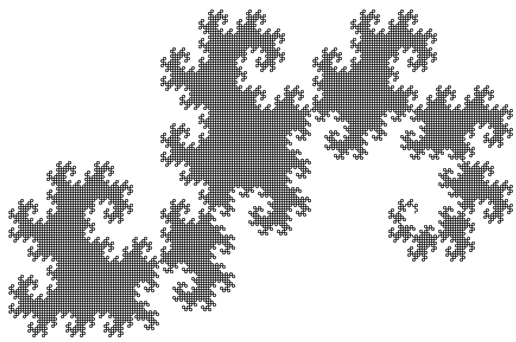

FIG. 1 – Le dragon de papier

3 La suite de Von Koch $K(n)$

$K(n)$ est la parité du nombre de zéros consécutifs qui terminent l'ecriture en base 2 de n. Si n est impair, le nombre de 0 à la fin est nul, donc pair. D'où $P(2k+1) = 0$. À noter que le cas de $P(0)$ se discute, selon que l'on estime que 0 s'écrit 0 ou le mot vide : j'ai choisi la seconde possibilité.

Un automate solution a 4 états i, a, b, c ; i est initial. Les transitions sont : $i : 0 = a$, $i : 1 = b$, $a : 0 = i$, $a : 1 = c$, $b : 0 = b : 1 = b$, $c : 0 = c : 1 = c$; les valuations sont : $i \to 0$, $a \to 1$, $b \to 0$, $c \to 1$.

```
mot auto_koch 0 31;;
- : string = "00100010101000100010001010100010"
```

Définissez cet automate, calculer les premiers termes de la suite. La suite K permet de dessiner la suite de Von Koch : à l'étape n, avancer d'un pas, puis tourner de 60 ou 240° selon que $K(n)$ vaut 0 ou 1. Dessinez la courbe de Von Koch (figure 2).

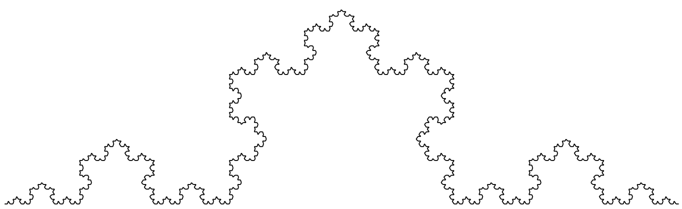

FIG. 2 – Le flocon de Von Koch